## 2.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se trata de… | Procedimiento |
|---|---|---|
| «coeficientes de fricción estática y cinética», «parte del reposo» | comprobar primero si se mueve | 2.3.1 |
| «distancia de frenado», «ruedas que deslizan», «se lanza hacia arriba del plano» | segunda ley en una recta con $F_r = \mu_k N$ | 2.3.1, 2.3.2 |
| plano inclinado, pendiente 3:4 | ejes a lo largo del plano | 2.3.2 |
| «cuerpos conectados», cuerdas, poleas móviles | relación de aceleraciones y un DCL por cuerpo | 2.3.3 |
| auto con remolque, bloques en contacto | sistema completo y luego un solo cuerpo | 2.3.3 |
| «peralte», «curva», «a punto de deslizarse» | $\sum F_n = mv^2/R$ con fricción máxima | 2.3.4 |
| péndulo, tensión de la cuerda en un ángulo | componentes $n$ y $t$ (rapidez con energía) | 2.3.4 |
| «juego giratorio», «volantín», «gira con rapidez angular constante» | $a_n = \omega^2 r$, $a_t = 0$ | 2.3.4 |
| «abandona la superficie», «saldrá volando» | $N = 0$ en el punto de despegue | 2.3.4 |
| «la normal se duplica», normal en la cima o el fondo de una curva | $\sum F_n = mv^2/\rho$ en ese punto | 2.3.4 |

## 2.3 Procedimientos

### *2.3.1 Movimiento rectilíneo con fricción*

1. Dibuja el diagrama de cuerpo libre (DCL): peso, normal, fricción, fuerzas aplicadas.
2. Elige $x$ en la dirección del movimiento (o de la tendencia al movimiento).
3. Si el cuerpo parte del reposo, **comprueba si se mueve**: con $a = 0$, calcula la fricción necesaria $F_{\text{nec}}$ y compárala con $\mu_s N$. Si $F_{\text{nec}} \leq \mu_s N$, no se mueve y $F_r = F_{\text{nec}}$. Si $F_{\text{nec}} > \mu_s N$, se mueve y $F_r = \mu_k N$.
4. Calcula $N$ con $\sum F_y = 0$ y escribe $\sum F_x = ma$.
5. Con $a$ constante usa $v = v_0 + at$, $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$, $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Si un cuerpo se detiene, revisa con $\mu_s$ si después se queda en reposo.

### *2.3.2 Plano inclinado*

1. Ejes: $x$ a lo largo del plano (sentido del movimiento) y $y$ perpendicular.
2. $\sum F_y = 0$: $N = mg\cos\theta$ más las componentes perpendiculares de otras fuerzas.
3. $\sum F_x = ma$ con $mg\sin\theta$ y $F_r$ con el signo correcto (la fricción siempre contra el movimiento).
4. Sube con fricción: $a = -g(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$. Baja: $a = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$.

### *2.3.3 Partículas conectadas con cuerdas y poleas*

1. **Relación de aceleraciones:** escribe la longitud de la cuerda en función de las posiciones y derívala dos veces; o cuenta los tramos que sostienen al cuerpo: si son $n$, $a_{\text{libre}} = n\,a_B$ y la fuerza sobre él es $nT$.
2. Decide el sentido del movimiento y **comprueba si hay movimiento** (procedimiento 2.3.1) con las tensiones de equilibrio.
3. DCL y $\sum F = ma$ de cada cuerpo, con el sentido positivo de cada uno en el sentido de su movimiento.



CUADERNO DE ESTUDIO INTENSIVO

# Curso de Emergencia

## Cinemática y Dinámica

Teoría breve, procedimientos y ejercicios de examen resueltos

Fritanga Collective

Versión 0.3.1 · 2026 · CC BY-NC-SA 4.0

# Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo

↑ Volver al índice

**Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno aplicará las leyes de Newton en la resolución de ejercicios de movimiento de la partícula en un plano, donde intervienen las causas que modifican a dicho movimiento.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia:** aparece en 19 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno), con 34 problemas si se cuentan todas las versiones, y en 5 de los 8 exámenes desde 2014. Suele ser el problema 2. Varios problemas piden una fuerza (normal o tensión) y además una rapidez que se obtiene con energía (Unidad 3).
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 y la tabla de la sección 2.2 (30 min).
  2. Sigue el ejemplo 2.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 2.5 con cronómetro (20 min cada uno).

### 2.1 Conceptos y expresiones

**Segunda ley de Newton.** Para una partícula de masa constante, la resultante de las fuerzas es igual a la masa por la aceleración: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Se escribe por componentes en el sistema de referencia que más simplifique:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y \qquad \text{o} \qquad \sum F_t = ma_t, \quad \sum F_n = ma_n.$$

En una dirección fija en la que la partícula no se mueve, la aceleración es cero (por ejemplo, perpendicular a un plano fijo mientras se mantiene el contacto: $\sum F_y = 0$). Ojo: en la dirección normal de una trayectoria curva no hay velocidad, pero sí aceleración, $a_n = v^2/\rho$.

**Peso y masa.** $W = mg$, con $g = 9.81\,\text{m/s}^2$ (o $32.2\,\text{ft/s}^2$). Si el enunciado da el peso en newtons o libras, la masa es $m = W/g$; en el sistema inglés la masa sale en slugs. Algunos enunciados dicen «pesa 2000 kg»: se trata de la masa.

**Fricción seca (Coulomb).** La fuerza de fricción es tangente a la superficie y se opone al deslizamiento (o a la tendencia a deslizar):

- **Sin movimiento:** $F_r$ es la que haga falta para el equilibrio, con $F_r \le \mu_s N$.
- **A punto de deslizar:** $F_r = \mu_s N$.
- **Deslizando:** $F_r = \mu_k N$, opuesta a la velocidad relativa.

Cuando el cuerpo parte del reposo hay que comprobar primero si se mueve: se supone el equilibrio, se calcula la fricción necesaria y se compara con $\mu_s N$.

**Plano inclinado un ángulo $\theta$.** Con $x$ a lo largo del plano y $y$ perpendicular: $N = mg\cos\theta$ (si no hay otras fuerzas perpendiculares) y la componente del peso a lo largo del plano es





# Presentación y cómo usar este cuaderno

↑ Volver al índice

Este cuaderno está pensado para quien tiene que aprobar **Cinemática y Dinámica** en poco tiempo: en un examen extraordinario, en un final o después de varias semanas sin estudiar la materia.

Sigue el orden de los temas del programa de la asignatura:

1. Cinemática de la partícula.
2. Cinética de la partícula.
3. Trabajo y energía e impulso y cantidad de movimiento de la partícula.
4. Cinemática del cuerpo rígido.
5. Cinética del cuerpo rígido.

Cada unidad se enseña igual que en clase: objetivo, conceptos, ejemplo resuelto y ejercicios. La diferencia es que todo está recortado a lo que se pregunta en los exámenes.

**Objetivo de la asignatura (programa).** El alumno será capaz de comprender los diferentes estados mecánicos de movimiento de partículas y de cuerpos rígidos considerando la geometría del movimiento, así como las causas que lo modifican. Asimismo será capaz de analizar y resolver ejercicios de cinemática y dinámica clásicas.

**De dónde salen los ejercicios.**

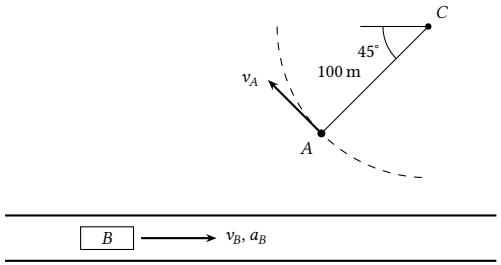
- Se revisaron los **53 exámenes finales y extraordinarios publicados de 2007-2 a 2018-2**: 27 aplicaciones distintas, varias con versiones A, B, C y D o de turno matutino y vespertino. Todos tienen resolución publicada.
- Los ejercicios del cuaderno se tomaron sobre todo de los exámenes de 2009-2 en adelante, que ya tienen el formato actual de cuatro problemas.
- Cada ejercicio indica el examen del que se adaptó. Los enunciados están redactados de nuevo, con los mismos datos y las unidades originales (Sistema Internacional o sistema inglés), y las figuras están redibujadas.
- Las resoluciones son propias y se verificaron numéricamente. Cuando el valor obtenido no coincide con el de una resolución publicada, la diferencia se anota en el Apéndice C (Fe de erratas).

**Requisito.** Cinemática y Dinámica se cursa después de Estática. Lo que se usa de esa materia (diagrama de cuerpo libre, fricción, centro de masa y momento de una fuerza) está resumido en la sección 0.7.

### Cómo usar este cuaderno

**Cada unidad tiene la misma estructura:**

1. Un recuadro de **Instrucciones de emergencia**: cuánto sale en el examen, cuánto tiempo dedicarle y la ruta corta.
2. **Conceptos y expresiones**, en tono de libro.
3. **Cómo reconocer el problema**: una tabla que lleva del enunciado al procedimiento.
4. **Procedimientos**, paso a paso.
5. **Ejemplo resuelto**.




**Resultado:** $v_{A/B} = 80.4\,\text{km/h}$ hacia la izquierda, 10.1° sobre la horizontal; $a_{A/B} = 3264\,\text{km/h}^2$ hacia la derecha, 60.1° sobre la horizontal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

### 1.7 Errores frecuentes

- Usar $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$ cuando la aceleración no es constante ($a = kt^2$, $a = -kv^2$, gráficas inclinadas).
- Confundir desplazamiento con distancia recorrida: si $v$ cambia de signo, hay que partir el intervalo donde $v = 0$.
- En persecuciones, mezclar relojes: el que arranca después tiene $(t - t_0)$ en su ecuación, y la respuesta puede pedirse desde su arranque.
- Olvidar el desnivel inicial en el tiro (el metro entre $A$ y $B$ del esquiador; la altura del punto de lanzamiento).
- En tiro, tomar $a_t = g$: en general $a_t = -g\sin\theta$ ($\theta$ de la velocidad sobre la horizontal: negativa al subir, positiva al bajar) y $a_n = g\cos\theta$; solo en la cima $a_t = 0$ y $a_n = g$.
- Derivar mal $s(t)$: si $s = t^4/4$, entonces $v = t^3$ y $a_t = 3t^2$.
- En una pista circular, dar solo $a_t$ (o solo $a_n$) como «aceleración»: la aceleración total es $\sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.
- Mezclar unidades: km/h con m/s, mi/h con ft/s; $g = 32.2\,\text{ft/s}^2$ con datos en pies.
- En poleas, contar una sola vez los dos tramos que sostienen una polea móvil, o usar sentidos positivos distintos para cada cuerpo.

### 1.8 Formulario de emergencia de la unidad

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$x = v_0\cos\theta_0\, t, \quad y = v_0\sin\theta_0\, t - \tfrac{1}{2}gt^2, \quad R = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$\text{tiro: } a_n = g\cos\theta, \ \ \rho = \frac{v^2}{g\cos\theta}, \ \ \rho_{\text{cima}} = \frac{v_x^2}{g}$$

$$\textstyle\sum c_i y_i = L \ \Rightarrow\ \sum c_i v_i = 0, \ \sum c_i a_i = 0; \qquad \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$





# Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen

↑ Volver al índice

**Instrucciones de emergencia**

- **Tiempo:** 30 minutos. Léela completa antes de cualquier otra unidad.
- **Para qué:** decidir dónde invertir el tiempo. No todos los temas valen lo mismo.
- **Si Estática quedó lejos:** repasa la sección 0.7 antes de la Unidad 2.

### 0.1 Cómo es el examen

Según los 53 exámenes publicados de 2007-2 a 2018-2:

- **Problemas:** 4 desde 2009-2 (antes eran 3). Cada problema suele tener dos o tres incisos.
- **Duración:** 2 horas desde 2013-1 (hasta 2012-2 eran dos horas y media).
- **Versiones:** el mismo día se aplican dos a cuatro versiones (A, B, C, D o turno matutino y vespertino) con la misma estructura y otros datos. Por eso, en este cuaderno, las versiones de un mismo examen cuentan como **un solo examen**: son 27 exámenes distintos.
- **Unidades:** la mayoría de los problemas están en el Sistema Internacional, pero algunos vienen en el sistema inglés (lb, ft, in, slug). Se resuelven en las unidades del enunciado; las conversiones están en el Apéndice A.
- **Calificación:** las instrucciones recientes dicen que se califica la claridad y la limpieza del desarrollo, no solo el resultado. El diagrama de cuerpo libre y la ecuación general escrita antes de sustituir valen puntos aunque el número final salga mal.

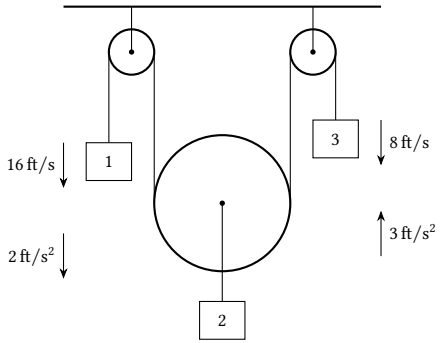
### 0.2 Qué tan seguido sale cada tema

Frecuencia en los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones del mismo examen cuentan como uno). La columna «Problemas» cuenta todas las versiones (200 problemas en total). Un problema que se resuelve con dos métodos, por ejemplo energía para la rapidez y segunda ley para la fuerza normal, cuenta en las dos unidades para la columna de exámenes.

| Unidad | Tema | Exámenes (27) | Problemas | Desde 2014 (8) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Cinemática de la partícula | 20 | 40 | 7 |
| 2 | Cinética de la partícula | 19 | 34 | 5 |
| 3 | Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento | **26** | 52 | 7 |
| 4 | Cinemática del cuerpo rígido | 18 | 28 | **8** |
| 5 | Cinética del cuerpo rígido | **25** | 46 | **8** |

**Observaciones:**

- **Unidades 3 y 5** salen en casi todos los exámenes: son el núcleo de la materia.
- La **Unidad 4** no aparecía en los exámenes de 3 problemas (2007-2 a 2009-1), pero desde 2009-2 sale en 18 de 20 exámenes y en todos desde 2014. Hoy es tan obligatoria como la 5.




**Datos.** $v_1 = 16\,\text{ft/s}$, $a_1 = 2\,\text{ft/s}^2$ (abajo); $v_3 = 8\,\text{ft/s}$ (abajo), $a_3 = 3\,\text{ft/s}^2$ (arriba).

**Planteamiento.** Movimiento dependiente. Posiciones $y_1, y_2, y_3$ medidas hacia abajo desde los ejes de las poleas fijas. La polea móvil está sostenida por dos tramos:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = L \;\Rightarrow\; v_1 + 2v_2 + v_3 = 0, \quad a_1 + 2a_2 + a_3 = 0.$$

**Resolución.** Con positivo hacia abajo: $16 + 2v_2 + 8 = 0 \Rightarrow v_2 = -12\,\text{ft/s}$; $2 + 2a_2 - 3 = 0 \Rightarrow a_2 = 0.5\,\text{ft/s}^2$.

**Resultado.** $v_2 = 12\,\text{ft/s}$ hacia arriba; $a_2 = 0.5\,\text{ft/s}^2$ hacia abajo.

### 1.6 Ejercicios propuestos

#### Ejercicio propuesto 1.6.1 · Tren que frena

*Adaptado de: 1er final 2015-1, versión D, problema 1*

Un tren que viaja a 60 mi/h necesita 250 ft para detenerse si frena de manera uniforme. a) ¿Con qué aceleración frena? b) ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse?

**Resultado:** a) $a = -15.49\,\text{ft/s}^2$; b) $t = 5.68\,\text{s}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

#### Ejercicio propuesto 1.6.2 · Aceleración proporcional al cuadrado del tiempo

*Adaptado de: Extraordinario 2009-2, problema 1*

La aceleración de una partícula es directamente proporcional al cuadrado del tiempo. En $t = 0$ la partícula está en $x = 36\,\text{ft}$; en $t = 9\,\text{s}$, $x = 144\,\text{ft}$ y $v = 27\,\text{ft/s}$. Exprese $x$ y $v$ en función de $t$.

**Resultado:** $v = 0.02743t^3 + 7$ (ft/s); $x = 0.006859t^4 + 7t + 36$ (ft).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

#### Ejercicio propuesto 1.6.3 · Patrulla que arranca dos segundos después

*Adaptado de: 1er final 2015-1, versión B, problema 1*

Un automóvil con velocidad constante pasa junto a una patrulla estacionada. Dos segundos después, la patrulla arranca y acelera a razón de $5\,\text{m/s}^2$ hasta 180 km/h; mantiene esa





### 0.5 Qué recortar y qué no

Si el tiempo no alcanza, se recorta en este orden:

1. El movimiento relativo de dos partículas (salió una vez).
2. El collarín que desliza sobre una barra que gira (Unidad 4).
3. La energía del cuerpo rígido (Unidad 5): pocos problemas la piden.
4. Los choques (Unidad 3): dos problemas desde 2014.

No conviene recortar:

- el trabajo y la energía con resortes y fricción;
- la segunda ley en componentes normal y tangencial;
- el cuerpo que rueda sin deslizar con un cuerpo colgado y la polea doble;
- el mecanismo de cuatro articulaciones o de manivela-biela-corredera;
- el tiro parabólico.

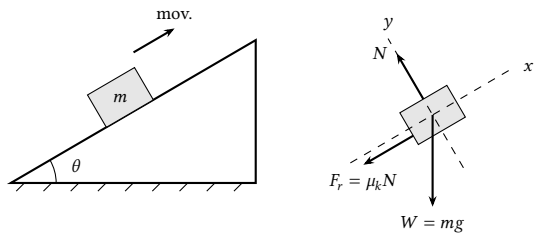
### 0.6 En el examen (120 minutos)

1. Lee los cuatro problemas (5 min) y empieza por el que reconozcas mejor; casi siempre el 1 o el 4.
2. Reparte unos 25 minutos por problema y deja 10 al final para revisar.
3. En cada problema: datos con unidades, sistema de referencia, **diagrama de cuerpo libre** y ecuación general **antes** de sustituir.
4. Cada inciso se califica por separado. Si un inciso no sale, deja planteada la ecuación y sigue con el siguiente usando un valor supuesto, y dilo por escrito.
5. Al final revisa signos (sentido de giro, sentido de la fricción) y unidades (newtons contra kilogramos, libras contra slugs).

### 0.7 Lo que se usa de Estática

Cinemática y Dinámica tiene a Estática como antecedente. Estas son las cuatro herramientas que se usan en casi todos los problemas.

**Diagrama de cuerpo libre (DCL).** Se aísla el cuerpo y se dibujan *todas* las fuerzas externas: el peso $W = mg$ en el centro de masa, las reacciones en cada apoyo o superficie de contacto (normal perpendicular a la superficie), las tensiones a lo largo de cada cuerda y la fricción tangente a la superficie. En dinámica se dibuja además, aparte, el vector $m\vec{a}$ (y $\bar{I}\alpha$ en un cuerpo rígido): las ecuaciones igualan las fuerzas del DCL con ese «diagrama cinético».



b) En $C$: $v_x = 25$ y $v_y = -9.81(5.137) = -50.39\,\text{m/s}$. Entonces $v = 56.25\,\text{m/s}$, con $\theta = \tan^{-1}(50.39/25) = 63.6^\circ$ bajo la horizontal.

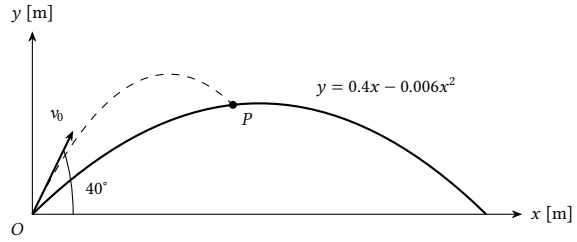
$$a_n = g\cos\theta = 9.81\cos 63.6^\circ = 4.36\,\text{m/s}^2, \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{56.25^2}{4.36} = 725.7\,\text{m}.$$

**Resultado.** a) $d = 181.6\,\text{m}$; b) $\rho_C = 726\,\text{m}$.

### Ejercicio 1.5.6 · Proyectil sobre terreno curvo

*Adaptado de: 1er final 2013-1, versión B, problema 2*

Un proyectil se lanza desde el origen con 20 m/s a 40° sobre la horizontal. El perfil del terreno se aproxima con $y = 0.4x - 0.006x^2$ ($x$, $y$ en metros). Para el instante en que cae sobre el terreno, determine: a) el tiempo de vuelo; b) su velocidad; c) la componente tangencial de su aceleración; d) el radio de curvatura de su trayectoria. Use $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.




**Datos.** $v_0 = 20\,\text{m/s}$; $\theta_0 = 40^\circ$; terreno $y = 0.4x - 0.006x^2$; $g = 9.81\,\text{m/s}^2$.

**Planteamiento.** Trayectoria $y = x\tan 40^\circ - \dfrac{9.81x^2}{2(20)^2\cos^2 40^\circ} = 0.8391x - 0.020896x^2$. Se iguala con el terreno; luego componentes normal y tangencial con $g$.

**Resolución.** a) $0.8391x - 0.020896x^2 = 0.4x - 0.006x^2 \Rightarrow x(0.4391 - 0.014896x) = 0$, así que $x = 29.48\,\text{m}$ (y $y = 6.58\,\text{m}$). Con $v_x = 20\cos 40^\circ = 15.32\,\text{m/s}$:

$$t = \frac{29.48}{15.32} = 1.924\,\text{s}.$$

b) $v_y = 20\sin 40^\circ - 9.81(1.924) = -6.02\,\text{m/s}$:

$$\vec{v} = (15.32\,\hat{\imath} - 6.02\,\hat{\jmath})\,\text{m/s}, \quad v = 16.46\,\text{m/s}, \quad \theta = 21.4^\circ \text{ bajo la horizontal.}$$

c) Al bajar, $g$ tiene componente a favor del movimiento: $a_t = g\sin\theta = 9.81\sin 21.4^\circ = 3.59\,\text{m/s}^2$.

d) $a_n = g\cos\theta = 9.13\,\text{m/s}^2$ y $\rho = v^2/a_n = 16.46^2/9.13 = 29.7\,\text{m}$.

**Resultado.** a) $t = 1.92\,\text{s}$; b) $v = 16.5\,\text{m/s}$ a 21.4° bajo la horizontal; c) $a_t = 3.59\,\text{m/s}^2$; d) $\rho = 29.7\,\text{m}$.





# Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial

↑ Volver al índice

**Objetivo (programa de la asignatura).** El alumno analizará y resolverá ejercicios de la cinemática de la partícula.

**Instrucciones de emergencia**

- **Frecuencia:** aparece en 20 de los 27 exámenes de 2007-2 a 2018-2 (las versiones de un mismo examen cuentan como uno), con 40 problemas si se cuentan todas las versiones, y en 7 de los 8 exámenes desde 2014. Casi siempre es el problema 1 (en 28 de los 41 exámenes de cuatro problemas).
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 1.1 y la tabla de la sección 1.2 (25 min).
  2. Sigue el ejemplo 1.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 1.5 con cronómetro (15 min cada uno).

## 1.1 Conceptos y expresiones

**Posición, velocidad y aceleración.** La posición de una partícula se describe con un vector $\vec{r}(t)$ medido desde un origen fijo. La velocidad y la aceleración son sus derivadas:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

La **rapidez** es la magnitud $v = |\vec{v}|$; el **desplazamiento** es $\Delta\vec{r}$ y la **distancia recorrida** es la longitud del camino, que solo coincide con $|\Delta\vec{r}|$ si la partícula no regresa.

**Movimiento rectilíneo.** Con una sola coordenada $x$ (o $s$) se cumple

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

- **Uniforme** ($a = 0$): $x = x_0 + vt$.
- **Uniformemente acelerado** ($a$ constante):

$$v = v_0 + at, \quad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

- **Aceleración variable:** se separan variables y se integra (tabla de la sección 1.3.2). Las fórmulas anteriores **no** valen.

**Gráficas.** La pendiente de la gráfica $x$-$t$ es $v$; la pendiente de la $v$-$t$ es $a$. El área bajo la $a$-$t$ es $\Delta v$ y el área bajo la $v$-$t$ es $\Delta x$ (con signo). La distancia recorrida es el área de $|v|$.

**Tiro parabólico.** Sin resistencia del aire, con $x$ horizontal e $y$ vertical hacia arriba:

$$a_x = 0, \quad v_x = v_0\cos\theta_0, \quad x = x_0 + v_0\cos\theta_0\, t,$$
$$a_y = -g, \quad v_y = v_0\sin\theta_0 - gt, \quad y = y_0 + v_0\sin\theta_0\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

En $t = 5$ s: $1 + 540(5) = 2701$, así que

$$s = \frac{\ln 2701}{15} = 0.527\ \text{in}, \quad v = \frac{36}{2701} = 0.013\,33\ \text{in/s},$$

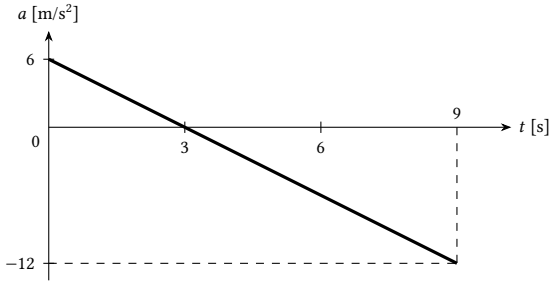
$$a = -15(0.01333)^2 = -2.66 \times 10^{-3}\ \text{in/s}^2.$$

**Resultado.** $s = 0.527$ in, $v = 0.0133$ in/s, $a = -0.002\,66$ in/s$^2$.

### Ejercicio 1.5.3 · Gráfica aceleración-tiempo

*Adaptado de: 1er final 2018-2, turno vespertino, problema 1*

Una partícula se mueve en línea recta con la aceleración de la gráfica: una recta que va de $a = 6$ m/s$^2$ en $t = 0$ a $a = -12$ m/s$^2$ en $t = 9$ s. En $t = 0$, $s = 3$ m y $v = 2$ m/s. Determine: a) su velocidad y su posición en $t = 9$ s; b) su desplazamiento y la distancia que recorre de $t = 0$ a $t = 9$ s.




**Datos.** $a(0) = 6$, $a(9) = -12$ m/s$^2$; $s_0 = 3$ m; $v_0 = 2$ m/s.

**Planteamiento.** Aceleración en función del tiempo dada por una gráfica: pendiente $(-12 - 6)/9 = -2$, así que $a = 6 - 2t$. Se integra dos veces.

**Resolución.**

$$v = 2 + 6t - t^2, \qquad s = 3 + 2t + 3t^2 - \tfrac{1}{3}t^3.$$

a) $v(9) = 2 + 54 - 81 = -25$ m/s; $s(9) = 3 + 18 + 243 - 243 = 21$ m.

b) Desplazamiento: $s(9) - s(0) = 21 - 3 = 18$ m. La partícula se detiene cuando $t^2 - 6t - 2 = 0$, $t = 3 + \sqrt{11} = 6.32$ s, donde $s = 51.32$ m. Distancia:

$$d = (51.32 - 3) + |21 - 51.32| = 48.32 + 30.32 = 78.64\ \text{m}.$$

**Resultado.** a) $v = -25$ m/s, $s = 21$ m; b) desplazamiento 18 m, distancia 78.6 m.

### Ejercicio 1.5.4 · Bolsa lanzada a un camión

*Adaptado de: 1er final 2015-1, versión A, problema 1*

Desde una ventana a 35 ft de altura se lanza horizontalmente una bolsa con 5 ft/s, para que caiga en un camión. En el instante del lanzamiento el camión pasa justo debajo de la





## 1.3 Procedimientos

*1.3.1 Movimiento rectilíneo con aceleración constante*

1. Elige origen y sentido positivo; convierte las unidades (1 km/h = 0.2778 m/s; 60 mi/h = 88 ft/s).
2. Escribe los tres datos que conoces de entre $v_0$, $v$, $a$, $t$, $\Delta x$.
3. Usa la ecuación que no contiene la incógnita que no te piden: sin $t$, $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$; sin $\Delta x$, $v = v_0 + at$.
4. Revisa el signo: si frena, $a$ tiene signo contrario a $v$.

*1.3.2 Aceleración variable: $a(t)$, $a(v)$, $a(s)$*

1. Identifica de qué variable depende $a$ y separa variables:

| Dato | Integral |
|---|---|
| $a(t)$ | $v - v_0 = \int_0^t a\,\mathrm{d}t$; luego $x - x_0 = \int_0^t v\,\mathrm{d}t$ |
| $a(v)$ | $t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$, o bien $x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\,\mathrm{d}v}{a(v)}$ |
| $a(s)$ | $\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s} a\,\mathrm{d}s$ |

2. Si la constante de $a$ es desconocida (por ejemplo, $a = kt^2$), integra con constantes $C$ y usa todas las condiciones dadas para hallar $k$ y las $C$.
3. Evalúa en el instante pedido.

*1.3.3 Gráficas a-t, v-t, x-t*

1. Por tramos: escribe $a(t)$ o $v(t)$ de cada tramo (recta: $y = y_0 + m(t - t_0)$).
2. Integra tramo por tramo usando como condición inicial el valor final del tramo anterior; o suma áreas.
3. Para la distancia recorrida busca dónde $v = 0$ y suma $|\Delta x|$ de cada intervalo.
4. La aceleración máxima es la mayor pendiente de la $v$-$t$.

*1.3.4 Persecución y encuentro*

1. Usa un solo reloj ($t = 0$ en un evento claro) y un solo origen.
2. Escribe $x(t)$ de cada móvil por tramos, con su hora de arranque: un móvil que arranca en $t_0$ tiene $x = \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$.
3. Iguala posiciones, $x_A(t) = x_B(t)$, en el tramo correcto; si sale un tiempo fuera del tramo, cambia de tramo.
4. Contesta lo que piden: tiempo desde el arranque de quien persigue o desde el $t = 0$ común.

*1.3.5 Tiro parabólico*

1. Ejes: origen en el lanzamiento, $x$ horizontal, $y$ hacia arriba. Descompón $v_0$.
2. Escribe $x(t)$ y $y(t)$.
3. Condición de llegada: suelo $y = -h$; pared $x = d$; pendiente recta de ángulo $\beta$ que baja desde el punto de lanzamiento: $y = -x \tan\beta$ (más el desnivel si lo hay); terreno curvo: $y_{\text{tray}}(x) = y_{\text{terreno}}(x)$.
4. Resuelve para $t$ (o para $x$) y obtén lo demás.
5. Si piden $\rho$ o $a_t$ en un punto, sigue con 1.3.6.

# Índice

**Presentación y cómo usar este cuaderno** 3

**Unidad 0 · Antes de empezar: qué viene en el examen** 5

**Unidad 1 · Cinemática de la partícula: rectilíneo, tiro parabólico y componentes normal y tangencial** 9

**Unidad 2 · Cinética de la partícula: segunda ley con fricción, cuerpos conectados y movimiento curvilíneo** 22

**Unidad 3 · Trabajo y energía, impulso y cantidad de movimiento de la partícula** 36

**Unidad 4 · Cinemática del cuerpo rígido: rotación, rodadura y mecanismos** 51

**Unidad 5 · Cinética del cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento plano general** 66

**Apéndice A · Formulario** 83

**Apéndice B · Exámenes completos** 87

**Apéndice C · Fe de erratas** 92

**Apéndice D · Fuentes** 95

**Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos** 97





$mg\sin\theta$. Si la pendiente se da como 3:4, entonces $\sin\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$. En un cuerpo que sube, la fricción y $mg\sin\theta$ apuntan hacia abajo del plano; en uno que baja, la fricción apunta hacia arriba.

**Cuerpos conectados.** Una cuerda ideal (inextensible y sin masa) que pasa por poleas sin masa ni fricción tiene la misma tensión en todos sus tramos. Si un cuerpo cuelga de $n$ tramos de la misma cuerda, sobre él actúa $nT$ y su desplazamiento es $1/n$ del desplazamiento del extremo libre: $a_{\text{libre}} = n\,a_B$.

**Componentes normal y tangencial.** En trayectoria curva, con $\hat{e}_t$ en la dirección de la velocidad y $\hat{e}_n$ hacia el centro de curvatura:

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2 r.$$

La fuerza resultante hacia el centro ($\sum F_n$) es la que produce $a_n$; no existe una «fuerza centrífuga» en el diagrama de cuerpo libre. En una circunferencia de radio $r$, $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$.

**Casos de movimiento curvilíneo que se repiten:**

- **Curva peraltada sin fricción:** $v^2 = gR\tan\theta$.
- **Curva peraltada a punto de deslizar hacia afuera:**

$$v^2 = gR\,\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = gR\tan(\theta+\phi), \qquad \tan\phi = \mu_s.$$

  Hacia adentro (rapidez mínima) se cambia el signo de $\mu_s$: $v_{\text{mín}}^2 = gR\tan(\theta-\phi)$. Si $\mu_s \geq \tan\theta$, la fricción sostiene el reposo y $v_{\text{mín}} = 0$.
- **Curva plana:** $\mu_s mg = mv^2/R$, de donde $v_{\text{máx}} = \sqrt{\mu_s g R}$.
- **Péndulo de longitud $L$:** $T - mg\cos\theta = mv^2/L$ y $a_t = -g\sin\theta$, con $\theta$ medido desde la vertical y $\hat{e}_t$ en el sentido en que crece $\theta$. En magnitud, $|a_t| = g\sin|\theta|$: la rapidez aumenta al bajar hacia la vertical y disminuye al subir.
- **Juego giratorio (péndulo cónico):** $T\cos\theta = mg$ y $T\sin\theta = m\omega^2 r$, de donde $\tan\theta = \omega^2 r/g$.
- **Despegue de una superficie convexa:** la partícula deja la superficie cuando $N = 0$, es decir, cuando $mg\cos\theta = mv^2/r$.

6. **Ejercicios de examen resueltos**.
7. **Ejercicios propuestos**, con el resultado. Las resoluciones completas están en el Apéndice E.
8. **Errores frecuentes**, **formulario de la unidad** y **procedimiento recomendado en el examen**.

**Formato de cada resolución.** Datos (con unidades) → Planteamiento (sistema de referencia, diagrama de cuerpo libre y ecuación general) → Resolución → **Resultado**. Conviene escribir igual en el examen: las instrucciones de los exámenes recientes advierten que se califica la claridad del desarrollo y no solo el resultado.

**Rutas de estudio.** La Unidad 0 propone una ruta de 5 semanas y otra de 2 semanas, ordenadas por lo que más puntos da.

**Regla de emergencia.** Nunca dos días seguidos sin estudiar. Un día mínimo (30 minutos y un ejercicio) cuenta como día cumplido.

### Licencia

© 2026 luigisrs.me. Publicado por Fritanga Collective. Esta obra está bajo una licencia **Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)**: `https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es`

Puedes copiarla, distribuirla y adaptarla con fines no comerciales, siempre que cites al autor (luigisrs.me) y compartas las adaptaciones con la misma licencia.

Los enunciados de los exámenes se citan como fuente y pertenecen a sus autores. Las referencias completas están en el Apéndice D.





$$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 32.2\,\mathrm{ft/s^2}; \quad 1\,\mathrm{mi/h} = 1.4667\,\mathrm{ft/s}; \quad 1\,\mathrm{km/h} = 0.2778\,\mathrm{m/s}$$

### 1.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Clasifica el problema con la tabla de la sección 1.2 (1 min).
2. Dibuja un esquema con origen, ejes, sentido positivo y todos los datos convertidos a unidades coherentes.
3. Si la aceleración no es constante, separa variables e integra; si es constante, usa las tres fórmulas.
4. En persecución o tiro, escribe una ecuación de posición por móvil o por eje y plantea la condición de encuentro o de llegada.
5. Si piden aceleración en una curva, da $a_t$, $a_n$, la magnitud y la dirección.
6. Revisa signos, unidades y que el tiempo obtenido caiga en el tramo que supusiste.

- La **Unidad 2** aparece muchas veces combinada con la 3: la rapidez se obtiene con energía y la fuerza normal o la tensión con la segunda ley en componentes normal y tangencial.
- **Los problemas se reciclan:** polea doble con cuerpos colgantes, cilindro que rueda con un cuerpo colgado, collarín con resorte, mecanismo de cuatro articulaciones, impulso con una gráfica fuerza-tiempo. Resolver exámenes anteriores es la mejor preparación.

### 0.3 Orden típico de los problemas

En los exámenes de 4 problemas (41 versiones, de 2009-2 a 2018-2) el orden casi siempre es:

| Problema | Tema típico | Versiones |
|---|---|---|
| 1 | Cinemática de la partícula: tiro parabólico, rectilíneo, componentes normal y tangencial (Unidad 1) | 28 de 41 |
| 2 | Cinética de la partícula o trabajo y energía (Unidades 2 y 3) | 34 de 41 |
| 3 | Mecanismo o rotación (Unidad 4), o bien energía o impulso (Unidad 3) | 22 y 19 de 41 |
| 4 | Cinética del cuerpo rígido (Unidad 5) | 35 de 41 |

### 0.4 Orden de estudio por puntos

El libro sigue el orden del programa, pero no hace falta estudiarlo en ese orden. Por importancia, las unidades 3 y 5 van primero; en la práctica conviene esta ruta, porque cada unidad usa la anterior:

1. **Unidad 1** (un día): el problema 1 casi siempre sale de aquí y es el más mecánico.
2. **Unidad 2** junto con la **Unidad 3**: segunda ley y energía se combinan en el mismo problema.
3. **Unidad 4**, por lo menos rodadura ($v_G = \omega r$, $a_G = \alpha r$), centro instantáneo de rotación y cuatro articulaciones.
4. **Unidad 5**: el problema 4 de casi todos los exámenes.

**Ruta de 5 semanas (unas 10 horas por semana).** Cada día, uno o dos bloques de 90 minutos y 15 minutos de cierre para anotar los errores del día. Cada sábado, un examen completo de 2 horas, cronometrado y sin consultar.

| Semana | Unidades |
|---|---|
| 1 | Unidad 0, sección 0.7 (Estática) y Unidad 1 |
| 2 | Unidad 2 y Unidad 3, trabajo y energía |
| 3 | Unidad 3, impulso y choques, y Unidad 4 |
| 4 | Unidad 5 y repaso de errores |
| 5 | Exámenes completos del Apéndice B y el Apéndice A de memoria |

**Ruta de 2 semanas.**

- Semana 1: Unidad 1 (solo tiro parabólico y componentes normal y tangencial), Unidad 3 completa y la parte de la Unidad 2 que se combina con ella.
- Semana 2: Unidad 4 (rodadura, CIR, cuatro articulaciones) y Unidad 5; un examen completo cada tercer día.
- Todos los días: el formulario del Apéndice A, escrito de memoria.





rapidez durante 12 s y entonces alcanza al automóvil. ¿Qué distancia recorrió la patrulla y cuál era, en km/h, la velocidad del automóvil?

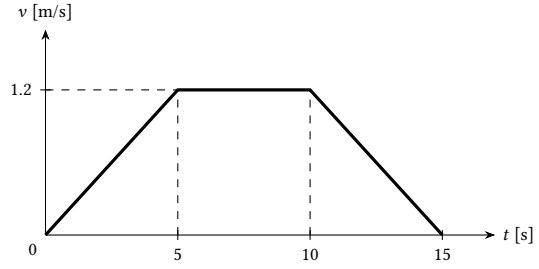
**Resultado:** 850 m; 127.5 km/h.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

#### Ejercicio propuesto 1.6.4 · Ascensor con gráfica velocidad-tiempo

*Adaptado de: 1er final 2018-2, turno matutino, problema 1*

Un ascensor sube del piso 1 al piso 4. Su velocidad crece linealmente de 0 a 1.2 m/s en los primeros 5 s, se mantiene constante de $t = 5$ a $t = 10$ s y disminuye linealmente hasta cero en $t = 15$ s. Determine la distancia entre los pisos 1 y 4 y la aceleración máxima del ascensor.




**Resultado:** 12 m; 0.24 m/s$^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 97.

#### Ejercicio propuesto 1.6.5 · Pelota lanzada contra una pared

*Adaptado de: 1er final 2018-1, turno vespertino, problema 1*

Se lanza una pelota desde el punto $A$, a 1.2 m sobre el suelo, hacia una pared vertical situada a 4 m de distancia horizontal. La pelota toca la pared en el punto $B$, a 0.93 m sobre el suelo, 1.23 s después del lanzamiento. Despreciando la resistencia del aire, determine la magnitud y la dirección de la velocidad inicial $\vec{v}_0$. Use $g = 9.81$ m/s$^2$.

**Resultado:** $v_0 = 6.66$ m/s a 60.8° sobre la horizontal.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 98.

#### Ejercicio propuesto 1.6.6 · Velocidad y aceleración relativas de dos autos

*Adaptado de: 2º final 2008-2, versión B, problema 2*

El auto $B$ avanza hacia la derecha por una calle recta a 65 km/h y acelera a 1200 km/h$^2$. El auto $A$ recorre con rapidez constante de 20 km/h una curva de 100 m de radio; en el instante indicado, su velocidad apunta hacia arriba y a la izquierda a 45° de la horizontal, y el centro $C$ de la curva está sobre la perpendicular a esa velocidad, arriba y a la derecha de $A$. Determine la velocidad y la aceleración de $A$ relativas a $B$.

**Fricción de Coulomb.** En una superficie con coeficientes $\mu_s$ (estático) y $\mu_k$ (cinético):

- Si el cuerpo **no desliza**, la fricción es la que haga falta para el equilibrio (o para la aceleración común) y solo se sabe que $F_r \le \mu_s N$.
- Si el cuerpo **desliza**, $F_r = \mu_k N$, con sentido opuesto a la velocidad relativa.
- Procedimiento: suponer que no desliza, calcular la fricción necesaria y compararla con $\mu_s N$. Si $F_r > \mu_s N$, desliza y se rehace con $\mu_k N$.
- La normal **no** siempre vale $mg$: en un plano inclinado es $mg\cos\theta$ si no hay otras fuerzas perpendiculares, y cambia si una cuerda o una fuerza tiene componente perpendicular al plano.

**Centro de masa.** En un cuerpo homogéneo y simétrico está en el centro geométrico. Para un cuerpo compuesto, $\bar{x} = \sum m_i \bar{x}_i / \sum m_i$. El peso actúa en el centro de masa, y en la Unidad 5 las ecuaciones $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ y $\sum M_G = \bar{I}\alpha$ se escriben respecto a él.

**Momento de una fuerza.** Respecto a un punto $O$, $M_O = F\,d$, con $d$ la distancia perpendicular de $O$ a la línea de acción; positivo si hace girar en sentido antihorario. En forma vectorial, $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ y, en el plano,

$$M_O = xF_y - yF_x.$$

Conviene tomar momentos respecto al punto donde concurren más incógnitas: un pasador, el punto de contacto o el punto donde se cruzan dos reacciones.

**Peso y masa.** En el Sistema Internacional, $W$ en newtons y $m = W/g$ en kilogramos con $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ (algunos exámenes usan 9.8 o 9.78). En el sistema inglés, $W$ en libras y $m = W/g$ en slugs con $g = 32.2\,\mathrm{ft/s^2}$. Un enunciado que dice «pesa 30 N» da un peso, no una masa.

## 0.8 Formulario de emergencia

El formulario completo de todas las unidades, con la tabla de momentos de inercia y las conversiones, está en el **Apéndice A**. Conviene escribirlo de memoria, desde cero, unos minutos cada día. El Apéndice B dice qué problemas vinieron en cada examen y propone tres exámenes completos como simulacro.

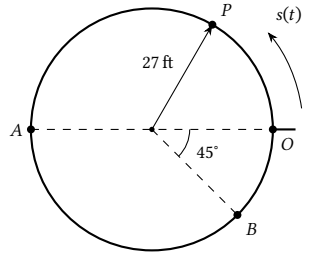




### Ejercicio 1.5.7 · Partícula en una circunferencia

*Adaptado de: 1er final 2013-1, versión A, problema 2*

Una partícula $P$ se mueve en sentido antihorario sobre una circunferencia de 27 ft de radio según $s = t^4/4$ ($s$ en ft, $t$ en s), con $s$ medida desde el punto $O$, el extremo derecho del diámetro horizontal. $A$ es el extremo izquierdo de ese diámetro y $B$ está a 45° bajo la horizontal, a la derecha del centro (siete octavos de vuelta desde $O$, es decir, tres octavos después de $A$: $s_B = \frac{7}{4}\pi r$). Encuentre: a) el instante en que $a_n$ y $a_t$ tienen la misma magnitud; b) la velocidad en $A$; c) la magnitud y dirección de la aceleración total en $B$.




**Datos.** $r = 27$ ft; $s = t^4/4$; $s_A = \pi r$; $s_B = \frac{7}{4}\pi r$.

**Planteamiento.** $v = \dot{s} = t^3$, $a_t = \ddot{s} = 3t^2$, $a_n = v^2/r = t^6/27$.

**Resolución.** a) $3t^2 = t^6/27 \Rightarrow t^4 = 81 \Rightarrow t = 3$ s.

b) $s_A = 27\pi = 84.82$ ft: $t^4 = 339.3$, $t = 4.292$ s, $v = t^3 = 79.1$ ft/s. En $A$ el movimiento antihorario apunta hacia abajo.

c) $s_B = 148.44$ ft: $t^4 = 593.8$, $t = 4.936$ s; $v = 120.3$ ft/s,

$$a_t = 3(4.936)^2 = 73.1\ \mathrm{ft/s^2}, \qquad a_n = \frac{120.3^2}{27} = 535.9\ \mathrm{ft/s^2},$$

$$a = \sqrt{73.1^2 + 535.9^2} = 540.8\ \mathrm{ft/s^2}.$$

En $B$, $\hat{e}_t$ apunta a 45° hacia arriba y a la derecha y $\hat{e}_n$ a 45° hacia arriba y a la izquierda. Con $\hat{\imath}$ a la derecha:

$$\vec{a} = (-327\,\hat{\imath} + 431\,\hat{\jmath})\ \mathrm{ft/s^2},$$

que forma 52.8° con la horizontal, hacia arriba y a la izquierda.

**Resultado.** a) $t = 3$ s; b) $v_A = 79.1$ ft/s hacia abajo; c) $a_B = 541$ ft/s$^2$ a 52.8° sobre la horizontal, hacia la izquierda.

### Ejercicio 1.5.8 · Sistema de poleas

*Adaptado de: 2º final 2010-1, versión A, problema 1*

En el sistema de la figura, una sola cuerda sale del cuerpo 1, pasa por una polea fija, baja y rodea la polea móvil de la que cuelga el cuerpo 2, sube a una segunda polea fija y baja al cuerpo 3. El cuerpo 1 baja a 16 ft/s con aceleración de 2 ft/s$^2$ hacia abajo; el cuerpo 3 baja a 8 ft/s con aceleración de 3 ft/s$^2$ hacia arriba. Determine la velocidad y la aceleración del cuerpo 2.

Si se elimina $t$ (lanzamiento desde el origen), la trayectoria es la parábola

$$y = x\tan\theta_0 - \frac{g\,x^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}.$$

En terreno horizontal, el alcance es $R = \dfrac{v_0^2\sin 2\theta_0}{g}$ y los ángulos $\theta_0$ y $90^\circ - \theta_0$ dan el mismo alcance.

**Componentes normal y tangencial.** Para una trayectoria curva plana, $\hat{e}_t$ es tangente en el sentido del movimiento y $\hat{e}_n$ apunta hacia el centro de curvatura:

$$\vec{v} = v\,\hat{e}_t, \qquad \vec{a} = a_t\,\hat{e}_t + a_n\,\hat{e}_n,$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \qquad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}.$$

$\rho$ es el radio de curvatura: en una circunferencia, $\rho = r$; para una curva $y(x)$,

$$\rho = \frac{\left[1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2\right]^{3/2}}{|\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2|}.$$

En el tiro parabólico la única aceleración es $g$; si $\theta$ es el ángulo de la velocidad con la horizontal, $a_t = \mp g\sin\theta$ (frena al subir, acelera al bajar) y $a_n = g\cos\theta$. En la cima, $\rho = v_x^2/g$.

**Movimiento dependiente.** Si varios cuerpos están unidos por una cuerda inextensible, la longitud de la cuerda escrita con las posiciones de los cuerpos es constante: $\sum c_i\,y_i = L$. Al derivar, $\sum c_i\,v_i = 0$ y $\sum c_i\,a_i = 0$.

**Movimiento relativo de dos partículas.** Con ejes que se trasladan con $B$:

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B, \qquad \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B, \qquad \vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B.$$

Este tema (4.3 del programa) solo aparece así, con dos automóviles; la Unidad 4 lo retoma para puntos de un cuerpo rígido.

## 1.2 Cómo reconocer el problema

| Si el enunciado dice… | Se trata de… | Ver |
|---|---|---|
| «frena uniformemente», «acelera a razón constante», «necesita 100 m para detenerse» | Aceleración constante | 1.3.1 |
| $a = kt^2$, $a = -kv^2$, $a = f(s)$ | Aceleración variable | 1.3.2 |
| Una gráfica $a$-$t$ o $v$-$t$; «construya las curvas» | Gráficas | 1.3.3 |
| «pasa junto a una patrulla», «alcanza», «ventaja para empatar» | Persecución y encuentro | 1.3.4 |
| «se lanza horizontalmente», «a 40°», «cae sobre la pendiente», «perfil del terreno» | Tiro parabólico | 1.3.5 |
| «pista circular», «radio de curvatura», «aceleración total», $s(t)$ sobre una curva | Componentes normal y tangencial | 1.3.6 |
| Cuerpos colgados de poleas con velocidades dadas | Movimiento dependiente | 1.3.7 |
| «velocidad de $A$ con respecto a $B$» | Movimiento relativo | 1.3.8 |





ventana con 2 ft/s. ¿Qué aceleración uniforme debe tener el camión para recibir la bolsa? Use $g = 32.2\ \mathrm{ft/s^2}$ y desprecie la altura de la caja del camión.

**Datos.** $h = 35$ ft; $v_{0A} = 5$ ft/s (bolsa, horizontal); $v_{0B} = 2$ ft/s (camión); $g = 32.2\ \mathrm{ft/s^2}$.

**Planteamiento.** Tiro horizontal para la bolsa y movimiento uniformemente acelerado para el camión, con el mismo reloj y el mismo origen bajo la ventana. Ambos deben estar en el mismo $x = R$ cuando la bolsa llega abajo.

**Resolución.** Caída: $0 = 35 - \frac{1}{2}(32.2)t^2 \Rightarrow t = 1.474$ s. Alcance de la bolsa: $R = 5t = 7.372$ ft. Camión:

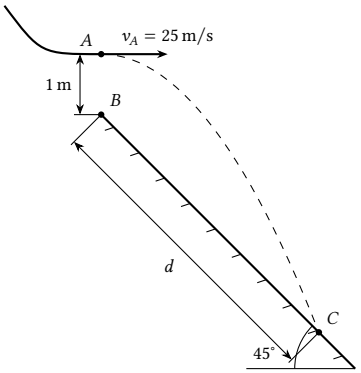
$$R = 2t + \tfrac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{2(R-2t)}{t^2} = \frac{2(7.372 - 2.949)}{1.474^2} = 4.07\ \mathrm{ft/s^2}.$$

**Resultado.** $a = 4.07\ \mathrm{ft/s^2}$.

### Ejercicio 1.5.5 · Esquiador sobre una pendiente

*Adaptado de: 1er final 2014-2, versión B, problema 2*

Un esquiador sale del extremo $A$ de un trampolín en dirección horizontal con 25 m/s. La pendiente de aterrizaje es recta, de 45°, y empieza en el punto $B$, 1 m directamente debajo de $A$. Despreciando la resistencia del aire, determine para el instante en que aterriza en $C$: a) la distancia $d = BC$; b) el radio de curvatura de su trayectoria en $C$. Use $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.




**Datos.** $v_A = 25$ m/s horizontal; desnivel $AB = 1$ m; $\beta = 45^\circ$; $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

**Planteamiento.** Tiro horizontal con origen en $A$: $x = 25t$, $y = -4.905t^2$. Un punto de la pendiente a distancia $d$ de $B$ tiene $x = d\cos 45^\circ$, $y = -1 - d\sin 45^\circ$, es decir, $y = -1 - x$.

**Resolución.** a) Llegada: $-4.905t^2 = -1 - 25t$, o $4.905t^2 - 25t - 1 = 0$; raíz positiva $t = 5.137$ s. Entonces $x = 128.4$ m y

$$d = \frac{x}{\cos 45^\circ} = 181.6\ \mathrm{m}.$$

*1.3.6 Componentes normal y tangencial; radio de curvatura*

1. Obtén $v$ en el punto (de $s(t)$, de las fórmulas de rapidez o del tiro).
2. $a_t$: con $\dot{v}$ si conoces $v(t)$; con $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ si conoces el cambio de rapidez en una distancia; en tiro, $a_t = -g\sin\theta$, con $\theta$ el ángulo de la velocidad sobre la horizontal (positivo al subir, negativo al bajar): la rapidez disminuye al subir y aumenta al bajar.
3. $a_n = v^2/\rho$; en tiro, $a_n = g\cos\theta$ y entonces $\rho = v^2/(g\cos\theta)$.
4. Magnitud $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$; dirección con $\tan\phi = a_n/a_t$ medida desde $\hat{e}_t$, y luego respecto a la horizontal.

*1.3.7 Movimiento dependiente con poleas*

1. Mide la posición de cada cuerpo (o polea móvil) desde una referencia fija, con el mismo sentido positivo para todos.
2. Escribe la longitud de cada cuerda: cada tramo que llega a una polea móvil cuenta una vez; una polea móvil sostenida por dos tramos aparece con coeficiente 2.
3. Deriva: $\sum c_i v_i = 0$, $\sum c_i a_i = 0$, y sustituye con signo.

*1.3.8 Movimiento relativo de dos partículas*

1. Escribe $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{a}_A, \vec{a}_B$ en componentes $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$. Si un móvil va en curva con rapidez constante, su aceleración es $a_n = v^2/\rho$ hacia el centro.
2. Resta: $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$, $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$.
3. Da magnitud y ángulo respecto a la horizontal.

## 1.4 Ejemplo resuelto

**Ejemplo resuelto · Corredor en pista circular**

*Adaptado del 1er final 2018-1, turno matutino, problema 1.*
En una pista circular de 150 m de radio, un corredor aumenta uniformemente su rapidez de 4 m/s a 8 m/s en una distancia de 100 m. Determine: a) el tiempo que emplea en recorrer los 100 m; b) la magnitud de su aceleración en el instante final.
**Datos.** $\rho = 150\,\mathrm{m}$; $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$; $v = 8\,\mathrm{m/s}$; $\Delta s = 100\,\mathrm{m}$; $a_t$ constante.
**Planteamiento.** Componentes normal y tangencial: la rapidez cambia uniformemente, así que $a_t$ es constante y la trayectoria es circular, así que $a_n = v^2/\rho$.
**Resolución.** a) Con $a_t = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}s$ constante se integra $v^2 = v_0^2 + 2a_t\Delta s$:

$$a_t = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta s} = \frac{8^2 - 4^2}{2(100)} = 0.24\,\mathrm{m/s^2}.$$

De $v = v_0 + a_t t$:

$$t = \frac{8 - 4}{0.24} = 16.67\,\mathrm{s}.$$

b) En el instante final:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{8^2}{150} = 0.427\,\mathrm{m/s^2}, \qquad a = \sqrt{0.24^2 + 0.427^2} = 0.490\,\mathrm{m/s^2}.$$





El vector $\vec{a}$ forma $\tan^{-1}(0.427/0.24) = 60.6^\circ$ con la dirección del movimiento, hacia el centro.
**Resultado.** a) $t = 16.7\,\mathrm{s}$; b) $a = 0.490\,\mathrm{m/s^2}$.

## 1.5 Ejercicios de examen resueltos

### Ejercicio 1.5.1 · Patrulla que alcanza a un auto

*Adaptado de: 1er final 2014-2, versión B, problema 1*

Un auto pasa junto a una patrulla estacionada con una velocidad constante de 70 mi/h. Tres segundos después, la patrulla arranca desde el reposo y acelera a razón de $10\,\mathrm{ft/s^2}$ hasta alcanzar 85 mi/h, que mantiene. Ningún vehículo cambia después su velocidad. Determine: a) el tiempo que tarda la patrulla en alcanzar al auto; b) la distancia que recorre la patrulla para alcanzarlo.

**Datos.** $v_A = 70\,\mathrm{mi/h} = 102.67\,\mathrm{ft/s}$; $v_P = 85\,\mathrm{mi/h} = 124.67\,\mathrm{ft/s}$; $a_P = 10\,\mathrm{ft/s^2}$; retraso de 3 s.

**Planteamiento.** Persecución. Reloj común: $t = 0$ cuando el auto pasa junto a la patrulla; origen en la patrulla.

**Resolución.** Auto: $x_A = 102.67\,t$. La patrulla acelera durante $(124.67 - 0)/10 = 12.47$ s, es decir, de $t = 3$ a $t = 15.47$ s, y recorre $\frac{1}{2}(10)(12.47)^2 = 777.1$ ft. En $t = 15.47$ el auto va en $x_A = 1588$ ft: todavía no la alcanza, así que el encuentro ocurre en el tramo uniforme:

$$x_P = 777.1 + 124.67\,(t - 15.47).$$

Igualando $x_A = x_P$:

$$102.67\,t = 777.1 + 124.67\,t - 1928.2 \;\Rightarrow\; 22\,t = 1151.1 \;\Rightarrow\; t = 52.32\,\mathrm{s}.$$

La patrulla lleva $52.32 - 3 = 49.32$ s en movimiento y recorre $x = 102.67(52.32) = 5372$ ft.

**Resultado.** a) 49.3 s desde que arranca la patrulla (52.3 s desde que pasa el auto); b) 5372 ft.

### Ejercicio 1.5.2 · Aceleración en función de la velocidad

*Adaptado de: 1er final 2011-2, versión B, problema 1*

La aceleración de una partícula en movimiento rectilíneo es $a = -15v^2$ (en $\mathrm{in/s^2}$, con $v$ en in/s). Si $s_0 = 0$ y $v_0 = 36\,\mathrm{in/s}$ cuando $t = 0$, determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 5$ s.

**Datos.** $a = -kv^2$ con $k = 15\,\mathrm{in^{-1}}$; $s_0 = 0$; $v_0 = 36\,\mathrm{in/s}$; $t = 5$ s.

**Planteamiento.** Aceleración función de $v$: se separa $\mathrm{d}v/v^2 = -k\,\mathrm{d}t$ y luego se integra $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

**Resolución.**

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -k\int_0^t \mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt \;\Rightarrow\; v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t} = \frac{36}{1 + 540\,t}.$$

$$s = \int_0^t \frac{36\,\mathrm{d}t}{1 + 540\,t} = \frac{1}{15}\ln(1 + 540\,t).$$